Exercice 1:

On considère la fonction définie sur IR par : $f(x) = -2x^2 + 4x + 16$.

a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = -2(x-1)^2 + 18$.
b) Calculer f(x)-f(1). Quel est le maximum de f ?

Exercice 2:

$f(x) = x(1-x)$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Montrer que $f(x) \leq \frac{1}{4}$
3. En déduire que f admet un maximum en $\frac{1}{2}$
4. Vérifier l'égalité $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
5. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
6. Dresser le tableau de variations.

Exercice 3:

1. Soit $f(x) = 5 + (x-3)^2$

Montrer que f admet un minimum su IR. Pour quelle valeur est-il atteint ?

2. Soit $f(x) = 2 - (x+7)^2$,

Montrer que f admet un maximum sur IR. Pour quelle valeur est-il atteint ?

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3(2x+5)^2 - 4$.

1. Montrer que $f(x) \geq -4$.
2. Montrer que $f(a)-f(b)=12(a+b+5)(a-b)$
3. Déterminer les variations de f sur $]-\infty, -\frac{5}{2}]$ *et* $[-\frac{5}{2}, +\infty[$

4. Déterminer le tableau de variation de f

Exercice 5 :

Soit f la fonction d´définie par $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer les réels a et b tels $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$

3. Montrer que f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$

Correction :

Exercice 1

a)f(x) = – 2(x – 1)² + 18=-2(x²-2x+1)+18=-2x²+4x+16

b)f(x)-f(1)= – 2(x – 1)² + 18-18=– 2(x – 1)²

$-2(x-1)^2 \le 0$ donc $f(x)\le f(1)$ f admet comme maximum f(1) :c'est 18

Exercice 2

1. $Df = IR$

2. f(x)- $\frac{1}{4}$ =x(1-x)- $\frac{1}{4}$ = x-x²- $\frac{1}{4}$ = -x²+x- $\frac{1}{4}$ =-(x- $\frac{1}{2}$)² ≤ 0 donc f(x) $\le$ $\frac{1}{4}$

3. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ donc f admet un maximum en $\frac{1}{2}$

4. f (x) = $\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-x^2+x-\frac{1}{4}=-x^2+x=x(1-x)$

5. Soit a et b deux réels tel que tel que $a\le b\le\frac{1}{2}$

$a \le b \le \frac{1}{2}$ alors $a - \frac{1}{2} \le b - \frac{1}{2} < 0$ donc $(a - \frac{1}{2})^2 \ge (b - \frac{1}{2})^2$ donc $-(a - \frac{1}{2})^2 \le -(b - \frac{1}{2})^2$ donc $\frac{1}{4} - (a - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4} - (b - \frac{1}{2})^2$ donc $f(a) \le f(b)$ alors f est croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

- Soit a et b deux réels tel que tel que $\frac{1}{2} \le a \le b$

alors $0 \le a - \frac{1}{2} \le b - \frac{1}{2}$ donc $(a - \frac{1}{2})^2 \le (b - \frac{1}{2})^2$ donc $-(a - \frac{1}{2})^2 \ge -(b - \frac{1}{2})^2$ donc $\frac{1}{4} - (a - \frac{1}{2})^2 \ge \frac{1}{4} - (b - \frac{1}{2})^2$ donc $f(a) \ge f(b)$ alors f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

6.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

Exercice 3

1. $(x-3)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 5 + (x-3)^2 \ge 5$ or f(3)=5 donc f admet 5 comme minimum il est atteint pour la valeur de 3

2. $(x+7)^2 \ge 0 \Leftrightarrow -(x+7)^2 \le 0 \Leftrightarrow 2 - (x+7)^2 \le 2$ or f(-7)=2 donc f admet 2 comme maximum il est atteint pour la valeur de -7

Exercice 4

1. $f(x) + 4 = 3(2x+5)^2 - 4 + 4 = 3(2x+5)^2 \ge 0$ donc $f(x) \ge -4$

2. $f(x) + 4 = 3(2x+5)^2 - 4 + 4 = 3(2x+5)^2 \ge 0$

$f(a) - f(b) = 3(2a+5)^2 - 4 - (3(2b+5)^2 - 4) = 3(2a+5)^2 - (2a+5)^2)$

$= 3(2a+5-2b-5)(2a+5+2b+5) = 3(2a-2b)(2a+2b+10)$

$= 3 \times 2(a-b)2(a+b+5) = 12(a-b)(a+b+5)$

3.

- Soit a et b deux réels tel que tel que $a \le b \le -\frac{5}{2}$

$a \le -\frac{5}{2}$ et $b \le -\frac{5}{2}$ alors $a+b \le -5$ alors $a+b+5 \le 0$ on a aussi $a-b \le 0$

donc $12(a-b)(a+b+5) \ge 0$ (produit de deux expressions négatifs)

$f(a) \ge f(b)$ alors f est décroissante sur $\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right]$

- Soit a et b deux réels tel que tel que $-\frac{5}{2} \le a \le b$

$-\frac{5}{2} \le a$ et $-\frac{5}{2} \le b$ alors $-5 \le a+b$ alors $0 \le a+b+5$ on a aussi $a-b \le 0$

donc $12(a-b)(a+b+5) \le 0$

$f(a) \le f(b)$ alors f est croissante sur $\left]-\frac{5}{2},+\infty\right]$

4.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Exercice 5

1. $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ il faut que $x+1 \ne 0$ $D_f = \mathfrak{R} \setminus \{1\}$

2. f (x) = a + $\frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)}{x-1} + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$

par identification $\begin{cases} a=1 \\ -a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$

$f(x) = 1 + \frac{4}{x-1}$

3. *Soit a et b deux réels tel que tel que $a \le b < 1$

$a \leq b < 1$ alors $a-1 \leq b-1 < 0$ donc $\dfrac{1}{a-1} \geq \dfrac{1}{b-1}$ donc $\dfrac{4}{a-1} \geq \dfrac{4}{b-1}$ donc $1+\dfrac{4}{a-1} \geq 1+\dfrac{4}{b-1}$

$f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur $]-\infty, 1[$

*Soit a et b deux réels tel que tel que $1 < a \leq b$

$1 < a \leq b$ alors $a-1 \leq b-1$ donc $\dfrac{1}{a-1} \geq \dfrac{1}{b-1}$ donc $\dfrac{4}{a-1} \geq \dfrac{4}{b-1}$ donc $1+\dfrac{4}{a-1} \geq 1+\dfrac{4}{b-1}$

$f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur $]-\infty, 1[$

4/

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f(x)		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	