

Exercice 1:

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -2x^2 + 4x + 16$.

- Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = -2(x - 1)^2 + 18$.
- Calculer $f(x) - f(1)$. Quel est le maximum de f ?

Exercice 2:

$$f(x) = x(1 - x)$$

- Déterminer le domaine de définition de f
- Montrer que $f(x) \leq \frac{1}{4}$
- En déduire que f admet un maximum en $\frac{1}{2}$
- Vérifier l'égalité $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
- En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$
- Dresser le tableau de variations.

Exercice 3:

- Soit $f(x) = 5 + (x - 3)^2$

Montrer que f admet un minimum sur \mathbb{R} . Pour quelle valeur est-il atteint ?

- Soit $f(x) = 2 - (x + 7)^2$,

Montrer que f admet un maximum sur \mathbb{R} . Pour quelle valeur est-il atteint ?

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3(2x+5)^2 - 4$.

- Montrer que $f(x) \geq -4$.
- Montrer que $f(a) - f(b) = 12(a+b+5)(a-b)$
- Déterminer les variations de f sur $]-\infty, -\frac{5}{2}]$ et $[-\frac{5}{2}, +\infty[$

4. Déterminer le tableau de variation de f

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer les réels a et b tels $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$

3. Montrer que f est décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $] 1, +\infty[$

Correction :

Exercice 1

$$a) f(x) = -2(x-1)^2 + 18 = -2(x^2 - 2x + 1) + 18 = -2x^2 + 4x + 16$$

$$b) f(x) - f(1) = -2(x-1)^2 + 18 - 18 = -2(x-1)^2$$

$$-2(x-1)^2 \leq 0 \text{ donc } f(x) \leq f(1) \text{ f admet comme maximum } f(1) : c'est 18$$

Exercice 2

1. $Df = \mathbb{R}$

$$2. f(x) - \frac{1}{4} = x(1-x) - \frac{1}{4} = x - x^2 - \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4} = -(x - \frac{1}{2})^2 \leq 0 \text{ donc } f(x) \leq \frac{1}{4}$$

$$3. f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \text{ donc f admet un maximum en } \frac{1}{2}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - x^2 + x - \frac{1}{4} = -x^2 + x = x(1-x)$$

5. Soit a et b deux réels tel que tel que $a \leq b \leq \frac{1}{2}$

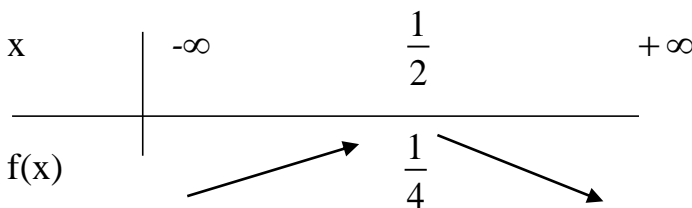
$a \leq b \leq \frac{1}{2}$ alors $a - \frac{1}{2} \leq b - \frac{1}{2} < 0$ donc $(a - \frac{1}{2})^2 \geq (b - \frac{1}{2})^2$ donc $-(a - \frac{1}{2})^2 \leq -(b - \frac{1}{2})^2$ donc $\frac{1}{4} - (a - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} - (b - \frac{1}{2})^2$ donc $f(a) \leq f(b)$ alors f est croissante sur $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$

- Soit a et b deux réels tel que tel que $\frac{1}{2} \leq a \leq b$

alors $0 \leq a - \frac{1}{2} \leq b - \frac{1}{2}$ donc $(a - \frac{1}{2})^2 \leq (b - \frac{1}{2})^2$ donc $-(a - \frac{1}{2})^2 \geq -(b - \frac{1}{2})^2$ donc

$\frac{1}{4} - (a - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4} - (b - \frac{1}{2})^2$ donc $f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$

6.



Exercice 3

1. $(x - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5 + (x - 3)^2 \geq 5$ or $f(3) = 5$ donc f admet 5 comme minimum il est atteint pour la valeur de 3

2. $(x + 7)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x + 7)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - (x + 7)^2 \leq 2$ or $f(-7) = 2$ donc f admet 2 comme maximum il est atteint pour la valeur de -7

Exercice 4

1. $f(x) + 4 = 3(2x + 5)^2 - 4 + 4 = 3(2x + 5)^2 \geq 0$ donc $f(x) \geq -4$

2. $f(x) + 4 = 3(2x + 5)^2 - 4 + 4 = 3(2x + 5)^2 \geq 0$

$$f(a) - f(b) = 3(2a + 5)^2 - 4 - (3(2b + 5)^2 - 4) = 3(2a + 5)^2 - (2a + 5)^2$$

$$= 3(2a + 5 - 2b - 5)(2a + 5 + 2b + 5) = 3(2a - 2b)(2a + 2b + 10)$$

$$= 3 \times 2(a - b)2(a + b + 5) = 12(a - b)(a + b + 5)$$

3.

- Soit a et b deux réels tel que tel que $a \leq b \leq -\frac{5}{2}$

$$a \leq -\frac{5}{2} \text{ et } b \leq -\frac{5}{2} \text{ alors } a+b \leq -5 \text{ alors } a+b+5 \leq 0 \text{ on a aussi } a-b \leq 0$$

donc $12(a-b)(a+b+5) \geq 0$ (produit de deux expressions négatifs)

$$f(a) \geq f(b) \text{ alors f est décroissante sur } \left] -\infty, -\frac{5}{2} \right]$$

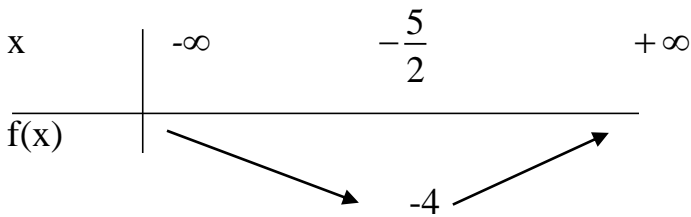
- Soit a et b deux réels tel que tel que $-\frac{5}{2} \leq a \leq b$

$$-\frac{5}{2} \leq a \text{ et } -\frac{5}{2} \leq b \text{ alors } -5 \leq a+b \text{ alors } 0 \leq a+b+5 \text{ on a aussi } a-b \leq 0$$

donc $12(a-b)(a+b+5) \leq 0$

$$f(a) \leq f(b) \text{ alors f est croissante sur } \left] -\frac{5}{2}, +\infty \right[$$

4.



Exercice 5

1. $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ il faut que $x+1 \neq 0$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$2. f(x) = a + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)}{x-1} + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$$

par identification $\begin{cases} a=1 \\ -a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$

$$f(x) = 1 + \frac{4}{x-1}$$

3. *Soit a et b deux réels tel que tel que $a \leq b < 1$

$$a \leq b < 1 \text{ alors } a-1 \leq b-1 < 0 \text{ donc } \frac{1}{a-1} \geq \frac{1}{b-1} \text{ donc } \frac{4}{a-1} \geq \frac{4}{b-1} \text{ donc } 1 + \frac{4}{a-1} \geq 1 + \frac{4}{b-1}$$

$f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur $]-\infty, 1[$

*Soit a et b deux réels tel que tel que $1 < a \leq b$

$$1 < a \leq b \text{ alors } a-1 \leq b-1 \text{ donc } \frac{1}{a-1} \geq \frac{1}{b-1} \text{ donc } \frac{4}{a-1} \geq \frac{4}{b-1} \text{ donc } 1 + \frac{4}{a-1} \geq 1 + \frac{4}{b-1}$$

$f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur $]-\infty, 1[$

4/

